|  |  |
| --- | --- |
| LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: SALAH HANNACHI « Technique» | SERIE D’EXERCICES Intégration-Logarithme népérien-Exponentielle |

 **EXERCICE N1 :** **A/**Calculer (au moyen d’une primitive) chacune des intégrales suivantes : ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ;; **B/** Calculer (au moyen d’intégration par parties) chacune des intégrales suivantes : ; ; ; **C/** 1) Dresser le tableau de signes de l’expression : 2) En déduire la valeur de l’intégrale K (indication : utiliser la relation de Chasles) **EXERCICE N2 :** 1) Soit la fonction a) Montrer qu’il existe deux réels et tels que pour tout b) Calculer alors 2) Calculer **EXERCICE N3 :** Soit le réel A 1) En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer que : AA 2) En déduire la valeur de A. **EXERCICE N4 :** On considère la fonction f : x On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, , ). 1) a) Déterminer : et b) En déduire une interprétation géométrique. c) Montrer que la droite : y=1 est une asymptote à (C) au voisinage de () 2) a) Montrer que pour tout réel x on a : f ‘(x)=() b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur IR. 3) a) Montrer que l’équation f(x)=0 admet dans IR exactement trois solutions, dont l’une est nulle. (On note et les deux autres solutions tels que ) b) Vérifier que -2,6-2,5 et que 1,41,5 4) Tracer la courbe (C). 5) Montrer, à l’aide de deux intégrations par parties successives, que : 2e5 6)a) Calculer l’aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l’axe des abscisses et les droites d’équations x=0 et x=1. b) Calculer l’aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D : y=x et les droites d’équations : x=1 et x=1 **EXERCICE N5 :** (BAC SC. EXP. 2010) **I**) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé (O , ), les courbes (C) et (), représentatives d’une fonction f définie et dérivable sur IR et de sa fonction dérivée f ‘. 1) Reconnaitre la courbe représentative de f et celle de f ‘. 2) Déterminer f(0) , f ‘(0) , f(-1) , f ‘(-1). 3) Calculer l’aire de la partie du plan limitée par la courbe de f ‘ , l’axe des abscisses et les droites d’équations x = -1 et x = 0. **II**) La fonction f est définie sur IR par f(x) = . 1) a) A l’aide d’une double intégration par parties, montrer que = 2e5. b) Déterminer l’aire de la partie du plan limitée par les courbes (C) et () et les droites d’équations x = -1 et x = 0. 2) Soit la restriction de f à l’intervalle . a) Montrer que réalise une bijection de sur un intervalle J que l’on précisera. b) Montrer que l’équation (x) = x admet dans une solution unique et que 1,41 1,42 . c) Montrer que est dérivable en et que ()’() = , ( désigne la fonction réciproque de ) .  **EXERCICE N6 :** La courbe représentative (C) ci-contre est celle de la fonction f définie sur [0,] par f(x)=. La courbe (C) admet au point O une demi-tangente à droite portée par la droite  : y=x. 1) Calculer 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque (notée ) dont on précisera le domaine de définition J. b) Tracer la courbe (C’) de la fonction . c) Calculer 3) Calculer (en unité d’aire : u.a) l’aire de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C’) et le segment [AB]. **EXERCICE N7 :** Soit la fonction f définie sur [0,+[ par : et (C) sa courbe selon un RON(O, ). 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0. 2) Etablir le tableau de variation de la fonction f, puis tracer la courbe (C). (l’unité : 2cm) 3) a) Montrer à l’aide d’une intégration par parties que b) Calculer le volume V (en unité de volume) du solide engendré par la rotation autour de (O, ) de la partie du plan limitée par (C), l’axe (O, ) et les droites d’équations x=1 et x=e

 **EXERCICE N8 :** On pose F(x)= 1) a) Déterminer le domaine de définition de F. b) Etudier la dérivabilité de F et en déduire que F est strictement croissante sur IR. c) Montrer que la fonction : x F(x)+F(-x) est constante sur IR. En déduire que F est impaire. 2) On pose g(x)= ; x a) Montrer que g est dérivable sur ][ et calculer g’(x). b) Calculer g(0). En déduire que g(x)=x c) Calculer et 3) a) Vérifier que F est la fonction réciproque de f : x tanx b) En déduire **EXERCICE 9 :** **A/** Dans le graphique ci-contre, la courbe () est celle de la fonction g définie sur ]1,+[ par g(x)= +b.ln(x-1) et la droite est d’équation y=x. L’unique tangente horizontale à la courbe () est au point A(2,2) 1) Dresser le tableau de variation de g. 2) En se servant des valeurs de g(2) et g’(2), montrer que a=b=1 3) a) Montrer que =e b) Calculer (en unité d’aire) l’aire de la partie du plan limitée par (), et les droites d’équation x=2 et x=e+1 **B/** Soit la fonction définie sur ]1,+[ par : (x)=xln(x1). On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O’, , ). 1) Montrer que pour tout réel x de ]1,+[ on a : (x)=g(x). 2) Dresser le tableau de variation de . 3) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de +. 4) Montrer que le point I(2,0) est un point d’inflexion de (C). 5) Tracer la courbe (C). **C/** Soit la suite () définie sur par : 1) a) Interpréter géométriquement le terme . b) Vérifier que =x+1+ pour tout réel x1 c) Calculer le terme . 2) a) Montrer que pour tout réel x de [2,e] et pour tout n on a : b) En déduire que pour tout n on a : c) Déterminer alors **EXERCICE 9 :** Soit g(x)=x ; x [0,+[. On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé (O, ,). 1) Etablir le tableau de variation de g. 2) Montrer que la droite D : y=x est une asymptote à (C) au voisinage de +. 3) Etudier la position de (C) par rapport à D. 4) Tracer (C) et D. 5) a) Montrer que f réalise une bijection de [0,+[ sur un intervalle K qu’on précisera. b) Tracer la courbe (C') de la fonction réciproque de f. 6) a) Montrer que pour tout t de [0,+[ on a : 1t 1 b) En déduire que pour tout x de [0,+[ on a : xx c) En déduire un encadrement de ln(1+) pour tout t de [0,+[. 7) Soit la mesure de l’aire du domaine limité par la courbe (C), la droite D et les droites d’équations x=0 et x=n. a) Montrer que b) En déduire **EXERCICE 10 :**

|  |  |
| --- | --- |
| x | 3 + |
| f’(x) |  + |
|  f |  +  |

On donne le tableau de variation de la fonction f : x ln(x+3). 1) Montrer que l’équation f(x)=x admet une solution unique dans. 2) Soit la suite réelle () définie sur IN par : =1 et =f(). a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : . (On prend ln41,4 et ln51,6) b) Montrer que la suite () est croissante. (on pourra se servir du principe de récurrence) c) En déduire que la suite () est convergente et déterminer sa limite. 3) a) Montrer que pour tout x , on a : b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout n on a : c) En déduire que pour tout n on a : d) Retrouver alors **EXERCICE 11:** **I/** Cocher la réponse exacte : La suite définie sur par : est une suite : a/ croissante b/ décroissante c/ stationnaire **II/** On pose et pour tout . 1) Calculer et. 2) a) Montrer à l’aide d’une intégration par parties, que : 2 pour tout . b) En déduire que . 3) a) Montrer que la suite () est décroissante et que . b) En déduire que la suite () est convergente. 4) a) Montrer que pour tout on a : b) En déduire que pour tout , c) Déterminer alors **EXERCICE N12 :** (BAC 2004) On considère la suite réelle () définie sur IN par : 1) a) Montrer que pour tout IN on a : b) Montrer que la suite () est croissante. c) En déduire que () est convergente vers une limite que l’on déterminera. 2) Soit la suite réelle () définie sur IN par : a) Montrer que () est une suite géométrique de raison .Préciser son premier terme. b) Exprimer à l’aide de . Puis calculer **EXERCICE 13 :** La courbe (C) ci-dessous représente dans un repère orthonormé (O, ) une fonction fdéfinie sur IR par : f(x)= où a et b sont deux réels. Les droites d’équations : y=1 et y= sont des asymptotes à (C) respectivement au voisinage de + et au voisinage de . (L’unité graphique : 2cm) 1) a) A l’aide d’une lecture graphique déterminer : et b) En déduire que : a=1 et b=1.  2) Montrer que la fonction f est impaire. 3) a) Vérifier que pour tout réel x on a : f(x)= 1+ b) Calculer, en , l’aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l’axe (O, ) et les droites d’équations : x=0 et x=1. c) En déduire, en , l’aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite d’équation y=1 et les droites d’équations x=0 et x=1. **EXERCICE 14 :** **I/** Soit la fonction g définie sur IR par : (x)=(1x)+1. 1) Etablir le tableau de variation de la fonction . 2) En déduire que (x)0 pour tout réel x. **II/** Soit la fonction définie sur IR par : (x)=x+x. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, ) du plan. 1) a) Montrer que pour tout réel x on a : (x)=(x) b) Etablir le tableau de variation de la fonction f. 2) a) Montrer que la droite D : y=x est une asymptote oblique à (C) au voisinage de (+). b) Etudier la position de (C) par rapport à D. 3) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de () une branche infinie parabolique dont on précisera la direction. 4) Tracer D et (C). 5) Soit . On désigne par l’aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D et les droites d’équations : x=0 et x=. a) Calculer en fonction de . b) En déduire . **EXERCICE 15 :**  Soit la fonction définie sur ]1,+[ par (x)= + ln(x1). On note () sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, , ). (unité graphique étant 2cm) 1) a) Montrer que g est dérivable sur ]1,+[ et que g’(x)= b) Etablir le tableau de variation de la fonction . 2) a) Montrer que l’équation (x)=3 admet exactement deux solutions et dans ]1,+[. b) On suppose que . Vérifier que 1 2) Etudier les branches infinies de (). 3) Montrer que la courbe () admet un unique point d’inflexion I que l’on précisera. 4) Tracer la courbe (). 5) a) Montrer que =e b) Calculer l’aire de la partie du plan limitée par (),: y=x et les droites d’équation x=2 et x=e+1 **EXERCICE 16 :** Soit la fonction définie sur IR par (x)=x+1. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, , ). 1) Etablir le tableau de variation de 2) a) Montrer que la droite D : y=x+1 est une asymptote oblique à (C) au voisinage de (-). b) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de (+). 3) Tracer la courbe (C) et la droite D. 4) On désigne par P la partie du plan limitée par (C), l’axe (O,) et les droites d’équations x=0 et x=2. a)En utilisant une intégration par partie, montrer que dx=2e b) Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de P autour de l’axe des abscisses. **EXERCICE 17 :**  **A/**Soit la fonction définie sur IR par : . On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O, ). 1) a) Résoudre dans IR, l’équation b) Dresser le tableau de variations de la fonction 2) Montrer que l’équation admet dans IR exactement deux solution et 1. Vérifier que . **B/** Soit la fonction définie sur IR par : et la suite () définie sur IN par : 1)Montrer que pour tout entier naturel : 2)Montrer que la suite () est croissante. 3)En déduire que la suite () est convergente et calculer sa limite. 4) a) Montrer que pour tout , on a : b) En utilisant l’inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel , on a : c) En déduire que pour tout entier naturel on a : . Retrouver alors . **EXERCICE 18 :**  Soit la suite () définie sur par : 1) a) Interpréter géométriquement le terme . b) Vérifier que =x+1+ pour tout réel x1 c) Calculer le terme . 2) a) Montrer que la suite () est croissante et à termes positifs. b) En déduire que () est convergente. 3) a) Montrer que pour tout réel x de [2,e] et pour tout n on a : b) En déduire que pour tout n on a : c) Déterminer alors

 **EXERCICE N19 :** **A/** On considère la fonction f définie sur IR par (C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,). 1) a) Montrer que f est dérivable en 0 et f’(0)=0. b) Calculer f’(x) sur chacun des intervalles ][ et . c) Dresser le tableau de variation de f. d) Etudier les branches infinies de (C). 2) Montrer que la partie de la courbe (C) correspondant à l’intervalle admet un unique point d’inflexion I que l’on précisera. 3) a) Montrer que l’équation f(x)=2 admet dans une solution unique et que 1 2 b) Tracer la droite D : y=2 et la courbe (C). 4) Soit un réel strictement négatif. a) Calculer l’aire A() du domaine du plan limité par la courbe (C) la droite D et les droites d’équations x= et x=0. b) Calculer **B/** Soit g la restriction de f à l’intervalle . 1) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle K que l’on précisera. 2) Tracer la courbe (C’) de dans le même repère (O,). 3) Sur quel intervalle est-elle dérivable ? 4) Montrer que pour tout x on a : (x)=ln(1. 5) Montrer que **C/** Soit ; n 1) a) Vérifier que pour tout x on a : puis calculer b) En déduire que 2) Calculer l’aire A du domaine du plan limité par la courbe (C) et les droites d’équation x=0 , x=1 et y=0. 3) a) Montrer que pour tout n on a : b) En déduire **EXERCICE N20 :** On pose = et pour tout n = . 1) Calculer et . 2) Etablir pour tout n la relation : 2. = . Calculer alors . 3) Montrer que la suite ( ) est décroissante. 4) a) En remarquant que x. = montrer que pour tout x. b) En déduire que : c) Déterminer alors **EXERCICE N21 :** 1) Vérifier que pour tout réel non nul x, on a : 1+ 2) a) Calculer l’intégrale I=t b) Calculer alors, l’intégrale J=t 3) Soit l’intégrale K=t Calculer l’intégrale KI. En déduire la valeur de K. **EXERCICE N22 :** On considère la fonction f : x On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, , ). (L’unité graphique : 1cm) 1) a) Déterminer : et b) En déduire une interprétation géométrique. c) Montrer que la droite : y=1 est une asymptote à (C) au voisinage de () 2) a) Montrer que pour tout réel x on a : f ‘(x)=() b) Etablir le tableau de variation de la fonction f sur IR. 3) a) Montrer que l’équation f(x)=0 admet dans IR exactement trois solutions, dont l’une est nulle. (On note et les deux autres solutions tels que ) b) Vérifier que -2,6-2,5 et que 1,41,5 4) Tracer la courbe (C). 5) Montrer, à l’aide de deux intégrations par parties successives, que : 2e5 6) a) Calculer en l’aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l’axe des abscisses et les droites d’équations x=0 et x=1. b) Calculer en l’aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D : y=x et les droites d’équations : x=1 et x=1